Lineární diferenciální rovnice 2. řádu (obyčejné) – OLDR 2. řádu
(pomůcka k pochopení, „cesty" k řešení rovnic)

1. „Co je „diferenciální rovnice – už víme" z MA1 – rovnice, „kde neznámá je funkce, která se v rovnici vyskytuje spolu se svými derivacemi (tj. hledaná funkce je ještě „navíc" zabalená do derivací) a řešení diferenciální rovnice je, „jako u každé rovnice, funkce, která tuto danou rovnici splňuje (tady – v nějakém intervalu, a tedy funkce „musí" mít i potřebné derivace).

Diferenciální rovnice 2. řádu obsahují derivace 2. řádu hledané funkce a má tvar – pokud je to rovnice t.zv. rozřešená vzhledem k druhé derivaci

$$(1) \qquad y'' = F(x, y, y'),\ x \in (a, b)$$

A „zdroj" těchto rovnic ? Jedním je fyzika (mechanika) – „2. Newtonův pohybový zákon je v nejjednodušší jednorozměrné podobě" ve tvaru

$$m.a = F \longrightarrow m.\frac{d^2 s}{dt^2} = F\left(t, s, \frac{ds}{dt}\right)$$

hledá-li se dráha $s(t)$ pohybu při působení síly F, pak $a(t) = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}\ (= s''(t))$, $\frac{ds}{dt} = v(t)$,

síla F může záviset na čase, poloze i rychlosti pohybu.

A pro určení průběhu pohybu se ještě zadává $s(t_0) = s_0$ a počáteční rychlost $\frac{ds}{dt}(t_0) = v(t_0) = v_0$ (s_0 – počáteční poloha). To pak vedlo k formulaci t.zv. počáteční úlohy pro rovnici (1) – hledá se řešení rovnice (1), které splňuje podmínky (t.zv. počáteční)

$$(2) \qquad y(x_0) = y_0 \,,\quad y'(x_0) = y_1, \quad x_0 \in (a,b), \; y_0, y_1 \in R$$

2) Řešit takové obecné rovnice (1) s podmínkou (2) je obecně problém – existence je ukázána v matematice (za vhodných podmínek na F), ale spočítat řešení jde dost často jen přibližně „numericky" (numerická matematika). Tedy jsme ustoupily – popsané tzv. lineárním diferenciálním rovnicím 2. řádu, tj. k

$$(3) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)\,y = f(x), \quad x \in (a,b),$$

$p(x), q(x), f(x)$ jsou fce, definované v (a,b)

Co jsou lineární rovnice? To jsme se dověděli v lineární algebře (dále LA): v LA se pracovalo a „žilo" v t.zv. vektorových (lineárních) prostorech, tj. množinách, kde je definováno sčítání prvků a násobení (zatím) reálnou konstantou (s obvyklými vlastnostmi) a lineární rovnicí byla nazvána rovnice

$$(4) \qquad L(x) = b \,, \qquad L : V_1 \to V_2$$

kde hledáme $x \in V_1$ tak, aby platilo $L(x) = b \in V_2$, V_1, V_2 – vektorové prostory, přičemž zobrazení L je t.zv. lineární zobrazení V_1 do V_2, tj. platí:

(i) $\forall\, v, w \in V_1 : \quad L(v+w) = L(v) + L(w)$

(ii) $\forall c \in R,\, v \in V_1 : \quad L(cv) = c\,L(v)$

A lineární algebra dává „návod" na řešení rovnice $L(x)=b$:
(návod vyplývá z „vlastností" vektorových prostorů a linearity zobrazení L):

(i) řešte nejdříve rovnici t.zv. homogenní ($b=0$)

$$(5) \qquad L(x)=0 \;;$$

množina řešení (5) je vektorový podprostor prostoru V_1, označíme tento prostor řešení V_H, tj. platí:

$$x_1, x_2 \in V_H \Rightarrow x_1 + x_2 \in V_H$$
$$c \in \mathbb{R},\ x \in V_H \Rightarrow cx \in V_H$$

A když víme", že V_H je konečné dimense, pak stačí najít "(podle LA) jen bázi V_H, tj. konečně mnoho „základních" řešení, a všechna ostatní řešení už jsou jejich lineární kombinací (spec. to může být jen $V_H = \{0\}$, ex. u dif. rovnic „není")

(ii) a když najdete (nebo spočítáte) jedno řešení rovnice „celé" s pravou stranou b (nehomogenní rovnice), tj. t.zv. partikulární řešení x_p rovnice (4), pak každé řešení rovnice (4) je ve tvaru

$$x = x_H + x_p\,,\quad \text{kde } L(x_H) = 0\,.$$

(neboť $L(x) = L(x_H + x_p) = L(x_H) + L(x_p) = 0 + b$ (cbd.)

A jak a proč tento „návod" funguje u OLDR řádu (3)?

(c) proč? protože zobrazení (zde) (často – diferenciální operátor)

$$\underline{L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y \quad , \quad L: C^2(a,b) \to C(a,b)}$$

<u>je zobrazení lineární</u> (také platí k úvodu z LA), neboť:

(i) $L(y_1+y_2) = (y_1+y_2)'' + p(x)(y_1+y_2)' + q(x)(y_1+y_2) =$

$= (y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1) + (y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2) = L(y_1)+L(y_2)$

(ii) $L(cy) = (c\,y(x))'' + p(x)(cy)' + q(x)(cy) =$

$c\,(y''+p(x)y'+q(x)y) = c\,L(y)$

(d) A když pochopíme zády LA, hledáme

<u>(i)</u> nejprve řešení rovnice

$$\underline{(6) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad , \; x \in (a,b)}$$

A tady jsme „věřili" matematikům (část jsem i na přednášce ukázala), „že u rovnice (6), za předpokladu $p(x), q(x) \in C(a,b)$, je V_H prostor dimenze 2 (podprostor prostoru $C^{(2)}(a,b)$) tedy stačí najít bázi V_H – dvě nezávislá řešení rovnice (6) – a pak všechna řešení jsou už jejich lineární kombinací – v teorii dif. rovnic se tato báze V_H nazývá <u>fundamentální systém řešení</u> – $y_1(x), y_2(x)$ je-li f.s. řešení, pak všechna" řešení jsou

$$\underline{y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)}, \quad c_1, c_2 \in R, \; x \in (a,b)$$

(t.zv. obecné řešení rovnice (6))

a lineární nezávislost řešení dif. rovnice se zde pozná pomocí determinantu – „Wronskiánu" ; platí –

– $y_1(x), y_2(x)$ jsou LNZ řešení (6) $\Leftrightarrow$ determinant

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x) \\ y_1'(x), & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad v\ (a,b)$$

a (ii) : a když pak spočítáme (nebo „najdeme") aspoň jedno řešení rovnice s pravou stranou (3) $y_p(x)$ (partikulární řešení), dle LA už každé další řešení je ve tvaru $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$, $y_0 \in V_H$.

a píše se : $$\underline{y_{ob}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x),}$$

$$c_1, c_2 \in R, \ x \in R$$

(t. zv. obecné řešení rovnice (3))

a nyní už „jen" algebra – jak najít řešení bodu (i) (tj. fundamentální systém řešení) a $y_p(x)$ z bodu (ii)

ke (ii) máme „návod" – zobecnění metody „variace konstant"

(měli jsme už variaci konstant u OLDR 1. řádu (MA1)

Hledáme řešení $y_p(x)$ ve tvaru ($y_1(x), y_2(x)$ je fund. systém řešení)

$$\underline{y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)}$$

a pro $c_1(x), c_2(x)$ – hledané funkce dostáváme soustavu rovnic:

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$$
$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \quad , \; x \in (a,b)$$

Determinant této soustavy je $W(y_1,y_2)(x) \neq 0$ v (a,b) $\Rightarrow$

$\underset{(LA)}{\Rightarrow}$ soustava má právě 1 řešení pro $x \in (a,b)$, tj. zjistíme $c_1'(x), c_2'(x)$ (spojité v (a,b)) a dále integrací (když se „podaří") i $c_1(x), c_2(x)$ a tedy i $y_p(x)$.

(Poznámka a připomenutí – 2. rovnice se dostane dosazením do diferenciální rovnice (3) poté, co z $y_p'(x)$ „vyhodíme" výraz s $c_1'(x)$ a $c_2'(x)$, což je právě první rovnice soustavy)

A teď, když víme, co máme dělat, tak už „jen" algebra! –
– jak to udělat – t.zn. máme nějakou metodu na nalezení fundamentálního systému homogenní rovnice?
Pak, pokud „spočítáme" fundamentální systém rovnice, $c_1(x), c_2(x)$ už „nějak" zvládneme – řešit soustavy umíme, a $c_1(x), c_2(x)$ pak integrací z $c_1'(x), c_2'(x)$ třeba budeme umět získat! A zde je problém – na „výpočet" fundamentálního systému není obecný návod –
a tak jsme ustoupili v MA2 až k tomu nejjednoduššímu případu, tj. $p(x) = p$, $q(x) = q$ – p, q – konstanty:

tj. le OLDR 2. řádu s konstantními koeficienty, tj.

(7) $$y'' + py' + qy = 0 \quad , \quad x\in R$$

A zde pomohl „dobrý" nápad matematiků – inspiroval se řešením dif. rovnice 1. řádu

$$y' + py = 0 \;,\; \text{tj. } y' = -py \quad (p\in R \text{ konstanta})$$

a je vidět (i bez separace proměnných), že řešení je ve tvaru $y_H(x) = c\,e^{-px}$, $x\in R$, $c\in R$

A asi tedy odtud pochází ten „nápad" hledat řešení i rovnice (7) ve tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda = ?$ ($\lambda\in R$?)

Aby $y(x) = e^{\lambda x}$ bylo řešení (7), musí být

$$(e^{\lambda x})'' + p(e^{\lambda x})' + qe^{\lambda x} = 0 \;,\; \text{tj.}$$

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0 \quad \text{a díky } e^{\lambda x} \neq 0$$

(*) $$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

– tedy pro λ dostaneme kvadratickou rovnici ! (*)

(nazývá se charakteristická rovnice příslušné rovnice (7))

A nyní – řešení „závisí" na $p, q \to D = p^2 - 4q$:

(i) $D > 0 \Rightarrow$ řešení $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ a máme fundamentální systém ($x\in R$)

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \;,\; y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \;;$$

neboť tato řešení jsou lineárně nezávislá, snadno se ukáže, že

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x}, & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

a tedy obecné řešení homogenní rovnice (7) je

$$\underline{y_H(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad , \; x \in R, \; c_1, c_2 \in R}$$

(ii) $D = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 \in R$ – a první problém !

$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, a $y_2(x) = ?$ – a matematici opět uspěli – ukázali, že i $y_2(x) = x \cdot e^{\lambda_1 x}$ je řešení rovnice (7) a to LNZ na $y_1(x)$, tj. zde je f.s.

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} \quad , \quad y_2(x) = x\, e^{\lambda_1 x}$$

a $$\underline{y_H(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x} \, , \; x \in R, \; c_1, c_2 \in R}$$

(toto jsme ukázali , i LNZ $y_1(x)$ a $y_2(x)$ pomocí Wronskiánu na přednášce – viz poznámky k přednášce ze 4.3. na „dubu" (poznámky mají datum 2.3.))

a poslední případ

(iii) $D < 0$, tj. $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ $(\beta \neq 0)$

– komplexní kořeny – „co teď" máme dělat ?

Zkusili jsme „pokus" pro $\lambda_{1/2} = \pm i\beta$ (viz opět přednáška a její zápis ze 4.3.) a našli jsme řešení (z fyziky inspirace!) : $y_1(x) = \cos \beta x$, $y_2(x) = \sin \beta x$, $x \in R$

a pak jsme odvodili v případě $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ řešení ve tvaru

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x\,, \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x\,, \quad x \in R$$

Na přednášce jsem už tehdy neukázala, že $y_1(x), y_2(x)$ řeší rovnici (4) pro $D<0$, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, ani že $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ v R – je to dost početní – spíše cvičení z derivování a sčítání – tak můžete zkusit i sami, stejně tak se dá spočítat i $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ v R, a tedy tak ukázat, že $y_1(x), y_2(x)$ tvoří fundamentální systém řešení.

Poznámka:

Příklady fundamentálních systémů pro jednotlivé případy jsou uvedeny v zápise přednášky 4.3..
Dále pak ve zápisu přednášky z 9.3. je rozebrána metoda odhadu partikulárního řešení pro speciální pravé strany, řešené příklady jsou pak (ve dvou „dílech" dány ke již uskutečněné přednášce 11.3.20 – pokud by nestačily tyto příklady a předchozí vysvětlení „cesty" k jejich řešení, napište, pokusím se vše vysvětlit ještě podrobněji a lépe.